

## Специальные адаптивные сетки и коррекция Рунге – Ричардсона в задачах со слоями

В. Д. ЛИСЕЙКИН<sup>1,2</sup>, В. И. ПААСОНЕН<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, 630090, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, Россия

\*Контактный автор: Паасонен Виктор Иванович, e-mail: viki48@mail.ru

Поступила 15 августа 2020 г., доработана 26 мая 2021 г., принята в печать 2 июня 2021 г.

При решении задач с пограничными и внутренними слоями на адаптивных сетках весьма желательно пользоваться разностными схемами, которые имеют достаточно хорошую точность и сходятся равномерно по малому параметру при стремлении шагов сетки к нулю. Однако эти требования оказываются противоречивыми: схемы высокой точности не сходятся равномерно, а равномерно сходящиеся схемы имеют обычно лишь первый порядок точности. Тем не менее существует уникальная возможность разрешить это противоречие, повышая порядок точности путем применения экстраполяционных поправок Рунге – Ричардсона, представляющих собой линейные комбинации разностных решений на вложенных сетках.

В данной работе на примере нескольких употребительных разностных схем изучается эффективность такого подхода к расчетам, полученным на адаптивных сетках, явно задаваемых специальными координатными преобразованиями. Исследуются две схемы противотокового типа с диагональным преобладанием, равномерно сходящиеся, в сравнении с аналогом схемы с центральной разностью, не имеющей диагонального преобладания и не сходящейся равномерно. Кроме простых поправок применяются также двукратные поправки, еще более повышающие порядок точности результирующих решений.

*Ключевые слова:* равномерная сходимость, адаптивные сетки, пограничный слой, диагональное преобладание, коррекция Рунге – Ричардсона.

*Цитирование:* Лисейкин В.Д., Паасонен В.И. Специальные адаптивные сетки и коррекция Рунге – Ричардсона в задачах со слоями. Вычислительные технологии. 2021; 26(4):27–38. DOI:10.25743/ICT.2021.26.4.004.

### Введение

Важное место в механике, физике, химии и других областях науки занимают задачи, которые описываются системами уравнений с малым параметром при старших производных. Для этих задач характерны решения с пограничными и внутренними слоями различной природы и различных типов, сложные для численного моделирования. На равномерных сетках решать такие задачи особенно затратно, так как размер требуемого шага сетки лимитируется крайне малой шириной слоя и быстрым изменением решения в нем. Даже и неравномерные сетки, из интуитивных соображений сгущенные в слоях как-то приблизительно, не всегда подходят для этой цели. Для проведения

успешных экономических расчетов сетки непременно должны быть адаптивными, т. е. их сгущение должно быть согласовано с поведением решения. При этом весьма желательно пользоваться разностными схемами, которые имеют достаточно хорошую точность и по возможности сходятся равномерно по малому параметру. Часто эти требования противоречат одно другому: схемы высокой точности не сходятся равномерно по малому параметру, а равномерно сходящиеся схемы имеют обычно лишь первый порядок точности.

Однако, несмотря на серьезное противоречие, ситуация все же не является тупиковой с точки зрения стремления получить более точные приближения решений. Речь идет о возможности применения экстраполяционного метода Рунге–Ричардсона, основанного на построении специальных линейных комбинаций приближенных решений задач, зависящих от параметра, с помощью которых достигается повышение порядка точности расчетов. В этой связи необходимо отметить монографию [1], в которой идея Ричардсона успешно применена к решениям разностных схем на вложенных сетках и даны теоретические оценки метода в отношении разностных схем для уравнения Пуассона. В работе [2] метод Рунге–Ричардсона применен для численного моделирования задач, имеющих решения в виде солитонов с огромными градиентами, на вложенных равномерных сетках. Одно-и-двукратные поправки к решениям, выполненным по компактной схеме, позволили получить при этом реальную точность шестого и восьмого порядков соответственно.

Авторами в работе [3] проведено сравнение характера сходимости трех популярных схем первого и второго порядков точности при расчете модельных задач со слоями экспоненциального типа на адаптивных сетках, генерируемых с помощью априорно задаваемого координатного отображения. Две из этих схем (противопотоковая и схема Булеева) имеют матрицу с диагональным преобладанием, а третья схема является прямым обобщением на случай неравномерной сетки схемы с центральной разностью.

На наш взгляд, ничто не препятствует объединению в рамках одного алгоритма нескольких факторов повышения эффективности вычислений. Это, во-первых, специальные адаптивные сетки, во-вторых, разностные схемы, сходящиеся равномерно на них или имеющие другие позитивные качества (например, более высокий порядок точности), и, в-третьих, коррекция Рунге–Ричардсона приближенных решений, повышающая порядок точности результата.

В этом смысле данная работа является продолжением численных исследований [2, 3]. Методы коррекции решений здесь такие же, как в [2], но для случая неравномерной сетки, а исходные схемы и координатное преобразование, генерирующее адаптивные сетки, здесь такие же, как в [3], но параллельно формируются простые и двойные поправки на основе коррекции Рунге–Ричардсона, позволяющие по простым схемам получить точность до третьего–шестого порядков.

## 1. Разностные схемы

Хорошей моделью для многомерных задач с малым параметром является краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$-\mu(x, \varepsilon)U_{xx} + a(x)U_x + c(x)U = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad U(0) = U_0, \quad U(1) = U_1,$$

где функция  $C(x) \geq C_0 > 0$  отделена от нуля снизу, а функция  $\mu(x, \varepsilon) > 0$  стремится к нулю хотя бы для одного фиксированного значения  $x \in [0, 1]$ , когда стремится к

нулю малый параметр  $\varepsilon > 0$ . Проблеме построения специальных адаптивных сеток для решения такого рода задач посвящено множество исследований [4–7].

Существуют различные схемы для решения данной задачи. Обычно входящая в оценку ошибки константа зависит от нижней границы изменения  $\mu(x, \varepsilon)$ , стремясь к бесконечности при  $\mu(x, \varepsilon) \rightarrow 0$ , что означает неравномерный характер сходимости схемы относительно малого параметра  $\varepsilon$ . Для расчета слоев считается желательным использовать схемы, равномерно сходящиеся при стремлении к нулю малого параметра. На равномерных, а также и на неудачно построенных неравномерных сетках это невозможно. Однако на некоторых специальных последовательностях адаптивных сеток для простейшей противопотоковой схемы, аппроксимирующей уравнение с постоянной вязкостью  $\mu(x, \varepsilon) = \varepsilon$ , имеет место равномерная сходимость [4–6].

На произвольной неравномерной сетке противопотоковая схема имеет вид

$$-\mu(x, \varepsilon)\Lambda u + \frac{a(x) + |a(x)|}{2}\Delta_- u + \frac{a(x) - |a(x)|}{2}\Delta_+ u + c(x)u = f(x), \quad (1)$$

где  $x$  — произвольный внутренний узел сетки;  $\Delta_+$  и  $\Delta_-$  — простейшие односторонние аналоги дифференцирования, а  $\Lambda = 2(\Delta_+ - \Delta_-)/s$  — аналог двойного дифференцирования;  $s = h_+ + h_-$  — сумма местных значений шага сетки справа  $h_+$  и слева  $h_-$  от данного узла.

На специальных сетках, учитывающих специфику поведения решения в слоях, в работе [7] при постоянном  $\mu(x, \varepsilon) = \varepsilon$  теоретически доказана равномерная по малому параметру сходимость схемы (1) с первым порядком. Доказательство опирается на свойство диагонального преобладания схемы и заключается в построении мажоранты, с помощью которой в слое устанавливается устойчивость в смысле выполнения неравенства  $\|u\| \leq \text{const } \mu \|\Psi\|$ , где  $\Psi$  — погрешность, для которой в слое справедлива оценка  $\|\Psi\| = O(1/(N\mu))$ . Вне слоя получены обычная оценка устойчивости  $\|u\| \leq \text{const } \|\Psi\|$  и обычная оценка аппроксимации  $\|\Psi\| = O(1/N)$ . В результате при доказательстве сходимости малый параметр сокращается и сходимость в  $C$ -норме оказывается равномерной по малому параметру.

Для большинства схем второго порядка, построенных на основе комбинаций левой и правой разделенных разностей, например для схемы

$$-\mu(x, \varepsilon)\Lambda u + a(x)\Delta u + c(x)u = f(x), \quad \Delta = \frac{\Delta_- h_+ + \Delta_+ h_-}{s}, \quad (2)$$

превращающейся при равномерной сетке в схему с центральной разностью, диагональное преобладание имеет место не всегда, а лишь при достаточно малых шагах сетки. Тем не менее эта схема, а также схема четвертого порядка точности [8] на достаточно детальной сетке дают более точные результаты, чем схема с направленными разностями.

Помимо схем (1), (2) рассмотрим схему Булеева [9], которая является модификацией противопотоковой схемы (1), повышающей порядок аппроксимации и одновременно сохраняющей противопотоковый характер и свойство диагонального преобладания. Схема имеет вид

$$-\mu(x, \varepsilon)\frac{1}{1+R}\Lambda u + \frac{a(x) + |a(x)|}{2}\Delta_- u + \frac{a(x) - |a(x)|}{2}\Delta_+ u + c(x)u = f(x), \quad (3)$$

где

$$R = \frac{|a(x)|h_-}{2\mu(x, \varepsilon)} \quad \text{при} \quad a(x) \geq 0 \quad \text{и} \quad R = \frac{|a(x)|h_+}{2\mu(x, \varepsilon)} \quad \text{при} \quad a(x) < 0.$$

Заметим, что на произвольной сетке справедливо разложение

$$\Lambda U = \frac{2}{s}(\Delta_+ - \Delta_-)U = U_{xx} + \frac{d}{3}U_{xxx} + \frac{p+d^2}{12}U_{xxxx} + O(h^3),$$

где  $d = h_+ - h_-$  и  $p = h_+h_-$  — разность и произведение соседних шагов. На произвольной неравномерной сетке соседние шаги могут различаться на величину  $d = O(h)$ , поэтому порядок аппроксимации обеих схем (1), (2) на произвольной сетке первый. Но на квазиравномерной сетке, как известно [10], разность соседних шагов  $d = O(h^2)$ , поэтому здесь схема (2) имеет второй порядок.

Что же касается схемы (3), то ее погрешность несложными преобразованиями с помощью формулы Тейлора приводится к виду

$$\Psi(x) = -\frac{R^2\mu}{1+R}U''(x) - \frac{d\mu}{3(1+R)}U'''(\Theta_1) + \frac{a(x)h_{\pm}^2}{6}U'''(\Theta_2), \quad (4)$$

где  $\Theta_1, \Theta_2$  принадлежат промежутку  $(x - h_-, x + h_+)$ . Следовательно, при умеренном  $\mu$  она так же, как схема (2), имеет первый или второй порядок в зависимости от того, используется она на произвольной сетке или на квазиравномерной. В данной работе будем предполагать, что всюду используется адаптивная квазиравномерная сетка, явно задаваемая универсальным глобальным преобразованием [8], подходящим для произвольных экспоненциальных слоев, а также для степенных слоев первого рода.

Исследуем далее порядок аппроксимации схемы (3) на квазиравномерной сетке при условии малой вязкости. Покажем, что в этом случае порядки аппроксимации в слое и вне слоя различаются. Пусть, например, экспоненциальный слой имеет масштаб  $k = 1$ . В нем производные  $m$ -го порядка  $U^{(m)}$  обратно пропорциональны  $\mu^m$ , шаги  $h_{\pm} = O(\mu/N)$ , разность соседних шагов  $d = O(\mu/N^2)$ , где  $N$  — число шагов сетки. Очевидно, при этом  $R = O(h_{\pm}/\mu) = O(1/N)$ . Подставляя все эти значения в (4), получим  $\Psi = O(1/(N^2\mu))$ , т. е. в слое схема Булеева имеет второй порядок аппроксимации.

Вне слоя все производные  $U^{(m)}$  конечны, шаги  $h_{\pm} = O(1/N)$ , разность шагов  $d = O(1/N^2)$ , параметр  $R = O(1/(\mu N))$ . В этом случае наиболее лимитирующим является первое слагаемое погрешности, имеющее порядок

$$\Psi \simeq \frac{1}{N(1+N\mu)}.$$

Отсюда ясно, что порядок вне слоя равен двум только при очень жестком ограничении  $\mu N \gg 1$ , исключающем равномерную по  $\mu$  сходимость. В противном случае  $\mu N = O(1)$ , и тогда  $\Psi = O(1/N)$ , т. е. схема Булеева вне слоя обладает лишь первым порядком аппроксимации вопреки результатам формального анализа без учета малости вязкости.

Алгоритм построения сетки, сгущающейся в нуле, представляет собой модификацию [8] метода [11]. Он основан на построении по априорной информации координатного отображения заданного класса гладкости  $l$ , обеспечивая при этом ограниченность производных решения по новой переменной до заданного порядка  $n$ . На практике параметры  $l$  и  $n$  зависят от порядка аппроксимации схемы и выбираются так, чтобы обеспечить ограниченность производной в главном члене погрешности аппроксимации.

## 2. Повышение порядка точности разностных решений

Пусть сетка  $x_i, i = 0, \dots, N$ , является образом равномерной сетки  $\xi_i = i/N, i = 0, \dots, N$ , при специальном координатном отображении  $x = \psi(\xi)$ . Располагая расчетами на после-

довательности сеток по какой-нибудь разностной схеме, можно оценивать ошибки вычислений и реальный порядок точности, а также формировать комбинации решений, имеющие более высокий порядок точности, чем исходный метод. На практике часто используются вложенные сетки с удвоением числа шагов ( $N, 2N, 4N, \dots$ ), хотя это и не обязательно. Например, можно комбинировать решения, полученные на сетках с  $N, 2N$  и  $3N$  шагами. В отношении вычисления определенных интегралов открытие данной технологии связано с именем Рунге, хотя и при интегрировании, и при расчетах иного рода она в настоящее время чаще применяется лишь для оценки порядка (оценка Рунге), а не для коррекции результатов. В отношении вычисления функций любой природы, зависящих от параметра (в нашем случае это  $h = 1/N$  — шаг сетки по новой переменной), метод сформулирован Ричардсоном. Монография [1] явилась важной вехой, положившей начало возобновлению интереса к технологии коррекции Рунге–Ричардсона, но уже применительно к разностным схемам.

Суть метода в частном случае удвоения числа шагов заключается в следующем. Пусть разностная схема имеет порядок точности  $m$ . Тогда локальное значение решения на сетке с  $N$  узлами  $u^N \simeq U + bh^m$ , где  $U$  — точное решение;  $h = 1/N$ ;  $b$  — константа, зависящая от местного значения старшей производной, но не зависящая от  $h$ . На сетке с  $2N$  узлами в этой же точке  $u^{2N} \simeq U + b(h/2)^m$  с той же константой  $b$ . Следовательно, линейная комбинация

$$\hat{u}_i = \frac{2^m u_{2i}^{2N} - u_i^N}{2^m - 1} \quad (5)$$

имеет ошибку  $O(h^{m+d})$ , где обычно  $d = 1$  или  $d = 2$  в зависимости от того, по всем степеням разлагается погрешность разностной схемы или, как это часто бывает, только по четным степеням. В нашем случае для схем (1) и (3) обычно  $m = d = 1$ , а для схемы (2) —  $m = d = 2$ .

Если к алгоритму вычисления  $\hat{u}$ , рассматриваемому как самостоятельный метод, повторно применить описанную технологию, то получится метод порядка точности  $m + 2d$ , использующий расчеты на трех последовательных сетках:

$$\tilde{u}_i = \frac{2^{m+d} \hat{u}_{2i}^{2N} - \hat{u}_i^N}{2^{m+d} - 1} = \frac{2^{2m+d} u_{4i}^{4N} - (2^{m+d} + 2^m) u_{2i}^{2N} + u_i^N}{(2^{m+d} - 1)(2^m - 1)}. \quad (6)$$

Например, на базе схем первого порядка представляется возможным получить решения со вторым и третьим порядками точности, а на базе схемы второго порядка — с четвертым и шестым. Ясно, что такого рода коррекцию можно осуществлять и многократно. Всюду ниже уточнение (5) будем для краткости называть простой коррекцией, а (6) — двойной коррекцией.

Заметим, что попытка повышения порядка точности путем непосредственного построения компактных аппроксимаций ведет к сложным схемам с потерей диагонального преобладания, равномерной сходимости и локальной монотонности расчетных профилей в областях монотонности точных решений. Немаловажным недостатком таких схем является также их затрудненная воспроизводимость в том смысле, что лица, заинтересованные в качественных расчетах, но не владеющие вычислительными методами сверх стандартного уровня, не смогут и не захотят разобраться в хитросплетениях компактных схем. В таких случаях повышение точности на основе поправок к решениям по традиционным схемам является простым и надежным альтернативным путем, позволяющим к тому же в случае применения схем с диагональным преобладанием обеспечить равномерную по малому параметру сходимость.

Ниже численно исследуется результативность поправок к решениям, полученным по схемам (1)–(3) на специальных адаптивных сетках при малом  $\varepsilon$ .

### 3. Результаты численных экспериментов

Численные эксперименты проведены на двух краевых задачах вида

$$-\mu U_{xx} - U_x + U = 5 \sin(4\pi x), \quad \mu = (\varepsilon + qx)^2, \quad U(0) = 0, \quad U(1) = 1,$$

где параметр  $q$  равен нулю или единице. Вариант  $q = 0$  (задача 1) моделирует ситуацию, когда вязкость  $\mu = \varepsilon^2$  мала во всей области ( $0 \leq x \leq 1$ ) и схема Булеева имеет первый порядок точности. При  $q = 1$  (задача 2) вязкость  $\mu = (\varepsilon + x)^2$  мала только в окрестности нуля, при этом схема Булеева формально достигает второго порядка точности. Экспоненциальный слой единичного масштаба относительно  $\mu$  в обоих вариантах находится в окрестности  $x = 0$  (масштаб слоя относительно  $\varepsilon$  равен двум).

В табличных данных используются следующие обозначения:  $N$  — число шагов сетки, а  $\delta_j$  — апостериорная оценка  $C$ -нормы ошибки,  $p_j$  — оценка порядка точности, при этом значения индекса  $j = 0, 1, 2$  относятся соответственно к решению разностной схемы без поправки, к простой коррекции и к двойной коррекции.

**Задача 1.** Параметр  $q = 0$ , вязкость  $\mu = \varepsilon^2 = 10^{-4}$ . Задача решается в исходных физических координатах на последовательности вложенных сеток.

На рис. 1 приведены результаты расчета задачи 1 на сгущающихся сетках. Слева помещены результаты, полученные непосредственно по схемам, а справа — по формуле простой коррекции (5). Верхняя пара графиков соответствует противопотоковой схеме (1), средняя — схеме Булеева (3), а нижняя — схеме второго порядка точности (2), не имеющей диагонального преобладания. Из рис. 1 видно, что противопотоковая схема даже несколько точнее схемы Булеева, что косвенно подтверждает первый порядок последней, а схема второго порядка точности на грубой сетке с числом шагов  $N = 24$  осциллирует и уступает двум другим схемам, однако при детализации сетки быстро обгоняет их по точности. Кроме того, из рис. 1 во всех вариантах расчета следует безусловная эффективность применения корректирующих поправок. Даже в случае схемы первого порядка точности (верхние графики) скорректированное решение, построенное по расчетам на сетках с 24 и 48 узлами, значительно превосходит расчеты без коррекции на сетке с 48 узлами.

В табл. 1 приведены результаты расчетов задачи 1 с вязкостью  $\mu = \varepsilon^2 = 10^{-4}$ , полученные по трем схемам. Таблица разбита на три блока, которые относятся к противопотоковой схеме, схеме Булеева и схеме второго порядка точности — аналогу схемы с центральной разностью. В первом столбце указано число шагов  $N$  сетки, затем в паре столбцов располагаются оценка  $C$ -нормы ошибки разностного решения  $\delta_0$  и оценка порядка точности  $p_0$ , следующая пара содержит те же характеристики  $\delta_1, p_1$ , но в отношении простой коррекции, а последняя пара данных  $\delta_2, p_2$  относится к двойной коррекции.

Из табл. 1 видно, что порядок исходных разностных решений и поправок для простой противопотоковой схемы и схемы второго порядка точности приближается к теоретическим значениям (1, 2, 3) и (2, 4, 6) соответственно, а схема Булеева имеет действительно лишь первый порядок точности, при этом реальный порядок скорректированных решений для нее не достигает теоретических значений 2 и 3. В то же время схема

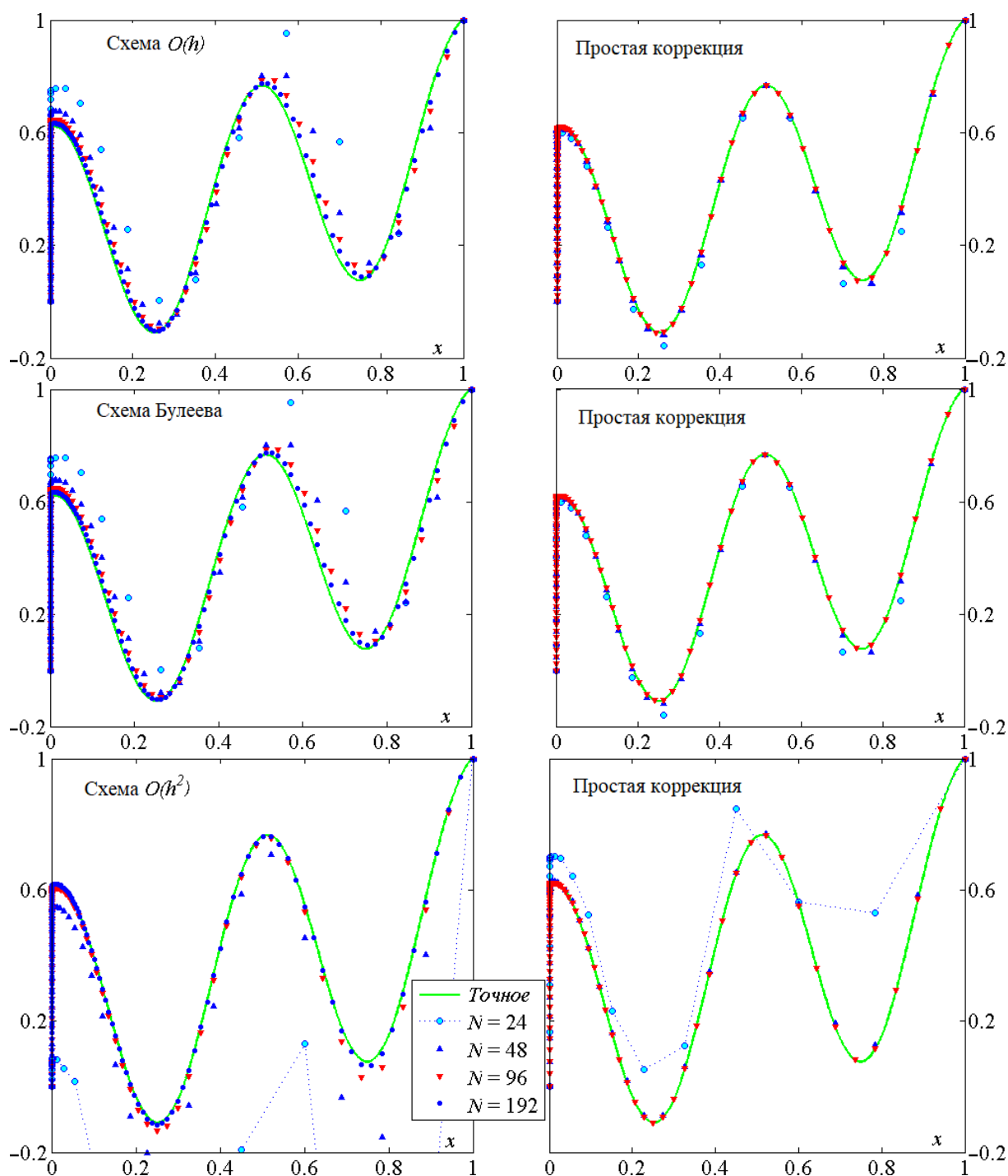


Рис. 1. Численные решения задачи 1 по трем различным схемам без коррекции (слева) и с простой коррекцией (справа);  $\mu = \varepsilon^2 = 10^{-4}$

Fig. 1. Numerical solutions of the problem 1 by three different schemes without corrections (left) and with the simple corrections (right);  $\mu = \varepsilon^2 = 10^{-4}$

второго порядка аппроксимации при детализации сетки существенно наращивает преимущество в точности по сравнению со схемами с противотоковой структурой, а корректирование ее решений, особенно двукратное, делает преимущество колоссальным. Это объясняется, в первую очередь, более высоким порядком точности и благоприятным разложением погрешности (лишь по четным степеням шага), при котором каждая коррекция повышает порядок на две единицы в отличие от двух других схем.

Т а б л и ц а 1. Результаты решения задачи 1 по трем схемам при  $\mu = \varepsilon^2 = 10^{-4}$   
 Table 1. Numerical results for solving the problem 1 by three schemes with  $\mu = \varepsilon^2 = 10^{-4}$

Противопотоковая схема $O(h)$						
$N$	$\delta_0$	$p_0$	$\delta_1$	$p_1$	$\delta_2$	$p_2$
48	2.52e-01	1.99	1.07e+00	0.90	—	—
96	1.07e-01	1.24	6.81e-02	3.98	4.37e-01	2.19
192	4.99e-02	1.10	1.89e-02	1.85	8.02e-04	9.09
384	2.40e-02	1.05	4.82e-03	1.97	1.24e-04	2.69
768	1.18e-02	1.03	1.24e-03	1.96	2.75e-05	2.17
1536	5.85e-03	1.01	3.13e-04	1.99	4.18e-06	2.72
Схема Булеева						
$N$	$\delta_0$	$p_0$	$\delta_1$	$p_1$	$\delta_2$	$p_2$
48	2.52e-01	1.99	1.07e+00	0.90	—	—
96	1.07e-01	1.24	6.84e-02	3.97	4.37e-01	2.19
192	4.98e-02	1.10	1.90e-02	1.85	7.91e-04	9.11
384	2.40e-02	1.05	4.84e-03	1.98	1.08e-04	2.88
768	1.18e-02	1.03	1.24e-03	1.97	4.18e-05	1.37
1536	5.81e-03	1.02	3.12e-04	1.99	6.43e-05	-6.22
Схема $O(h^2)$						
$N$	$\delta_0$	$p_0$	$\delta_1$	$p_1$	$\delta_2$	$p_2$
48	2.05e+00	-1.03	9.19e-01	0.54	—	—
96	2.12e-01	3.27	4.00e-01	1.20	1.28e-01	3.01
192	4.27e-02	2.31	1.44e-02	4.79	1.20e-02	3.42
384	1.01e-02	2.07	7.36e-04	4.29	3.81e-04	4.98
768	2.51e-03	2.01	4.42e-05	4.06	2.50e-06	7.25
1536	6.26e-04	2.00	2.74e-06	4.01	3.77e-08	6.05

**Задача 2.** Параметр  $q = 1$ , вязкость  $\mu = (x + \varepsilon)^2$ ,  $\varepsilon = 10^{-2}$ . Таким образом, вязкость на границе слоя  $x = 0$  также равна  $10^{-4}$ , а вне слоя вязкость не является малой величиной, поэтому формально схема Булеева в данном варианте имеет второй порядок точности. Однако в разложении ее погрешности содержатся все степени шага (и четные, и нечетные), поэтому каждая поправка повышает порядок лишь на единицу, а не на две, как для схемы второго порядка (2). Задача также решается в исходных физических координатах на последовательности вложенных сеток.

На рис. 2 приведены результаты расчета задачи 2 по трем схемам, а также соответствующие им простые и двойные коррекции: верхние графики — противопотоковая схема (1), средние — схема Булеева (3), нижние — схема второго порядка точности (2) без диагонального преобладания.

Из рисунка видно, что на грубой сетке исходное решение противопотоковой схемы сильно подвержено влиянию аппроксимационной вязкости, а решение схемы  $O(h^2)$  заметно осциллирует, тем не менее коррекция этих решений, особенно двойная, существенно улучшает точность. На более детальной сетке (графики справа) даже простая коррекция решений по всем трем схемам дает удовлетворительные результаты, а маркеры двойной коррекции лежат на кривой точного решения, визуально практически сливаясь с маркерами простой поправки.

Более подробное представление о поведении решений схем без коррекции и с коррекцией на последовательности сеток дает табл. 2. Данные простой коррекции, при-



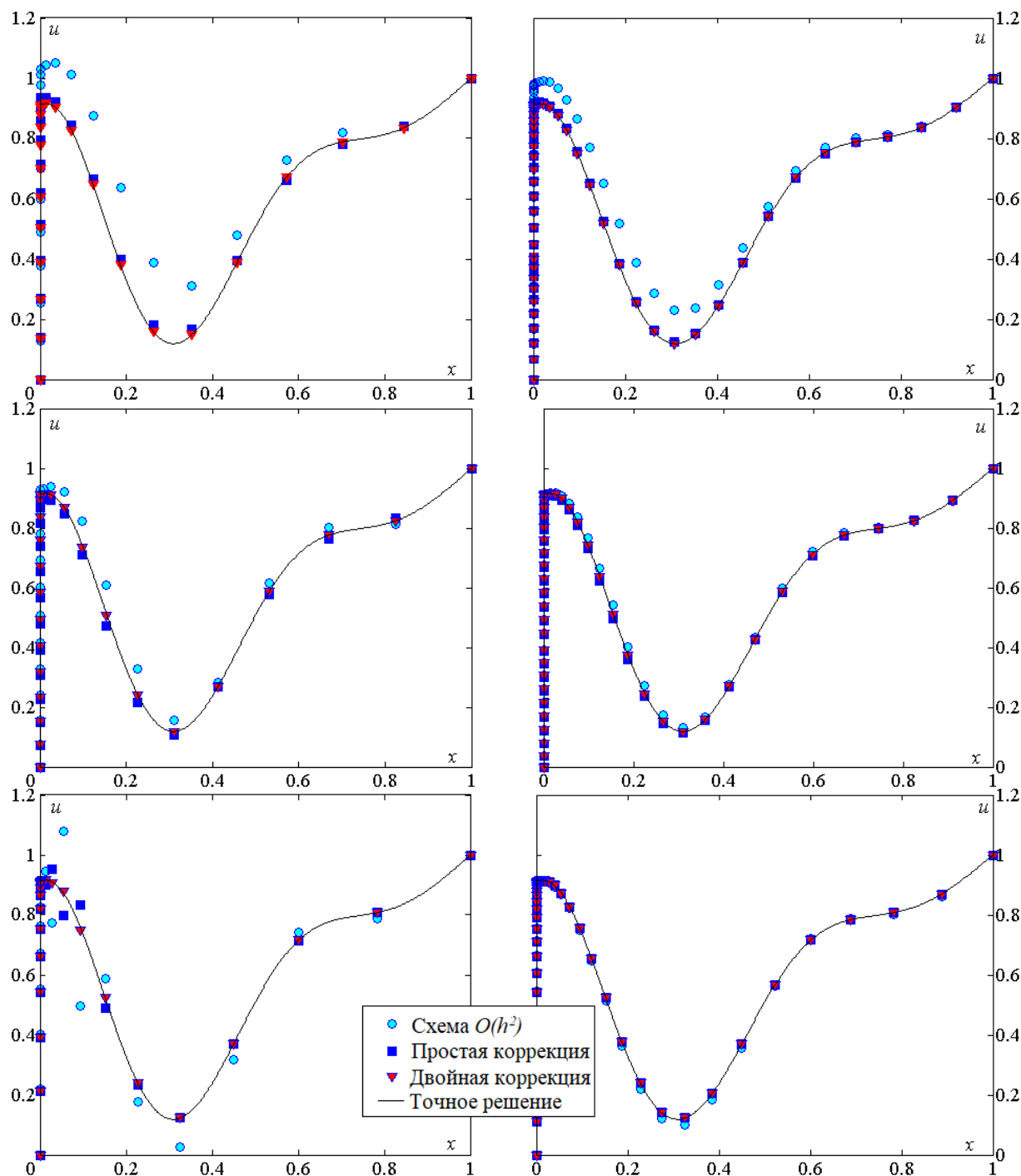


Рис. 2. Численные решения задачи 2 без коррекции и с коррекцией по трем различным схемам на сетке с  $N = 24$  (слева) и на более детальной сетке с  $N = 48$  (справа) при  $\varepsilon = 0.01$

Fig. 2. Numerical solutions of the problem 2 with corrections and without corrections by three schemes with  $N = 24$  (left) and  $N = 48$  (right);  $\varepsilon = 0.01$

веденные в табл. 2, получены по результатам расчетов на сетке с текущим числом шагов  $N$  и на предыдущей более грубой сетке, а данные двойной коррекции вычислены по расчетам на текущей сетке и на двух предшествующих. Из таблицы видно, что эффективность коррекции расчетов растет с детализацией сетки, причем тем быстрее, чем выше порядок точности. Здесь схема Булеева имеет второй порядок и результаты расчета по ней точнее расчетов по противопотоковой схеме первого порядка.

Т а б л и ц а 2. Апостериорная оценка в  $C$ -норме ошибок решения задачи 2 по трем схемам. Без коррекции ( $\delta_0$ ), с простой коррекцией ( $\delta_1$ ), с двойной коррекцией ( $\delta_2$ )

Table 2. A posteriori estimates of numerical solutions of the problem 2 by three schemes: without corrections ( $\delta_0$ ), with the simple corrections ( $\delta_1$ ), and with the double corrections ( $\delta_2$ )

$N$	Противопотоковая схема			Схема Булеева			Схема $O(h^2)$		
	$\delta_0$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_0$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_0$	$\delta_1$	$\delta_2$
48	1.2e-01	1.2e+00	—	6.8e-02	3.5e-01	—	2.5e-01	6.4e-01	—
96	6.6e-02	1.9e-02	3.8e-01	2.2e-02	6.3e-03	5.2e-02	1.8e-02	7.9e-02	1.2e-01
192	3.5e-02	5.4e-03	1.1e-03	6.2e-03	2.6e-03	2.3e-03	4.4e-03	1.4e-04	5.3e-03
384	1.8e-02	1.4e-03	1.2e-04	1.7e-03	9.2e-04	6.9e-04	1.1e-03	8.5e-06	1.8e-06
768	9.3e-03	3.6e-04	1.6e-05	4.4e-04	2.5e-04	1.5e-04	2.8e-04	5.2e-07	8.3e-09
1536	4.7e-03	9.2e-05	2.1e-06	1.5e-04	5.3e-05	2.6e-05	6.9e-05	3.3e-08	1.3e-10

Резюмируя сказанное, можно утверждать, что синтез эффективных разностных схем на специальных адаптивных сетках, построенных по заранее заданным формулам, опирающимся на априорную информацию о поведении решений в слоях, и поправок Рунге–Ричардсона дает возможность при сохранении простоты алгоритмов существенно повышать точность расчетов задач с пограничными слоями.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 20-01-00231).

## Список литературы

- [1] Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решения разностных схем. М.: Наука; 1979: 319.
- [2] Паасонен В.И., Федорук М.П. О повышении точности численных решений уравнения Гинзбурга–Ландау. Вычислительные технологии. 2020; 25(4):45–57. DOI:10.25743/ICT.2020.25.4.005.
- [3] Лисейкин В.Д., Паасонен В.И. Характер сходимости схем при расчете на адаптивных сетках задач со слоями. Вычислительные технологии. 2020; 25(5):66–79. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.006.
- [4] Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969; 9(4):842–859.
- [5] Лисейкин В.Д. О численном решении уравнений со степенным пограничным слоем. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1986; 26(12):1813–1820.
- [6] Miller J.J.K., O’Riordan E., Shishkin G.I. Finite difference methods for singular perturbation problems. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific; 2012: 191.
- [7] Liseikin V.D. Layer resolving grids and transformations for singular perturbation problems. Utrecht; Boston: VSP; 2001: 284.
- [8] Лисейкин В.Д., Паасонен В.И. Компактные разностные схемы и адаптивные сетки для численного моделирования задач с пограничными и внутренними слоями. Сибирский журнал вычислительной и прикладной математики. 2019; 22(1):41–56.

- [9] Булеев Н.Н. О численном решении двумерных уравнений эллиптического типа. Численные методы механики сплошной среды. 1975; 6(3):8–28.
- [10] Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов В.Б. Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Наука, Физматлит; 2005: 224.
- [11] Liseikin V.D. Grid generation for problems with boundary and interior layers. Novosibirsk: NSU; 2018: 296. (In Russ.)

---

Вычислительные технологии, 2021, том 26, № 4, с. 27–38. © ФИЦ ИВТ, 2021  
Computational Technologies, 2021, vol. 26, no. 4, pp. 27–38. © FRC ICT, 2021

ISSN 1560-7534  
eISSN 2313-691X

---

COMPUTATIONAL TECHNOLOGIES

---

DOI:10.25743/ICT.2021.26.4.004

**Special adaptive grids and Runge – Richardson correction in problems with layers**

LISEIKIN VLADIMIR D.<sup>1,2</sup>, PAASONEN VICTOR I.<sup>1,2,\*</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Center for Information and Computational Technologies, 630090, Novosibirsk, Russia

<sup>2</sup>Novosibirsk State University, 630090, Novosibirsk, Russia

\*Corresponding author: Paasonen Victor I., e-mail: [wiki48@mail.ru](mailto:wiki48@mail.ru)

*Received August 15, 2020, revised May 26, 2021, accepted June 2, 2021.*

**Abstract**

It is highly desirable using difference schemes with high accuracy and uniform convergence in a small parameter as the grid steps tend to zero for solving the problems with both boundary and interior layers. However, these requirements turn out to be contradictory: highly-accurate schemes may not converge uniformly, and uniformly converging schemes usually have only the first order of accuracy. Nevertheless, there is a unique opportunity to resolve this contradiction by increasing the order of accuracy by applying the Richardson – Runge extrapolation corrections, which are linear combinations of difference solutions on nested grids.

In this paper, using the example of several common difference schemes, we study the efficiency of such approach for calculations obtained on adaptive grids that are explicitly specified by special coordinate transformations. Two diagonal-dominated upstream-type uniformly converging schemes are investigated. They are compared with an analogue of the scheme with central difference that does not have a diagonal dominance and does not converge uniformly. In addition to simple corrections, double corrections are also used, which further increase the order of accuracy of the resulting solutions.

*Keywords:* uniform convergence, adaptive grids, boundary layer, diagonal dominance, Runge – Richardson correction.

*Citation:* Liseikin V.D., Paasonen V.I. Special adaptive grids and Runge – Richardson correction in problems with layers. Computational Technologies. 2021; 26(4):27–38. DOI:10.25743/ICT.2021.26.4.004. (In Russ.)

**Acknowledgements.** This work is supported by the RFBR (grant No 20-01-00231).

**References**

1. Marchuk G.I., Shaydurov V.V. Povyshenie tochnosti resheniya raznostnykh skhem [Improving the accuracy for solutions of difference schemes]. Moscow: Nauka; 1979: 319. (In Russ.)
2. Paasonen V.I., Fedoruk M.P. Improving the accuracy for numerical solutions of the Ginzburg – Landau equation. Computational Technologies. 2020; 25(4):45–57. DOI:10.25743/ICT.2020.25.4.005. (In Russ.)

3. **Liseikin V.D., Paasonen V.I.** Convergence behavior of popular schemes in case of calculating on adaptive grids problems with layers. *Computational Technologies*. 2020; 25(5):66–79. DOI:10.25743/ICT.2020.25.5.006. (In Russ.)
4. **Bakhvalov N.S.** On the optimization of the methods for solving boundary value problems in the presence of a boundary layer. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1969; 9(4):139–166.
5. **Liseikin V.D.** Numerical solution of equations with power boundary layer. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1986; 26(6):133–139.
6. **Miller J.J.K., O’Riordan E., Shishkin G.I.** *Finite numerical methods for singular perturbation problems*. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific; 2012: 191.
7. **Liseikin V.D.** *Layer resolving grids and transformations for singular perturbation problems*. Utrecht; Boston: VSP; 2001: 284.
8. **Liseikin V.D., Paasonen V.I.** Compact difference schemes and layer-resolving grids for the numerical modeling of problems with boundary and interior layers. *Numerical Analysis and Applications*. 2019; 12(1):37–50.
9. **Buleev N.N.** O chislennom reshenii dvumernykh uravneniy ellipticheskogo tipa [On numerical solution of two-dimensional equations of the elliptic type]. *Chislennyye Metody Mekhaniki Sploshnoy Sredy*. 1975; 6(3):8–28. (In Russ.)
10. **Kalitkin N.N., Al’shin A.B., Al’shina E.A., Rogov V.B.** *Vychisleniya na kvaziravnomernykh setkakh* [Computations on quasiuniform grids]. Moscow: Fizmatlit; 2005: 224. (In Russ.)
11. **Liseikin V.D.** Grid generation for problems with boundary and interior layers. Novosibirsk: NSU; 2018: 296. (In Russ.)